

المحاضرة الحادية عشرة

6.4) : اختبار الفرضيات :

1.6.4: تمهيد : للإحصاء أهمية بالغة في اتخاذ القرار في المواقف التي تخضع للمصادفة ، و يحتاج الأمر لاتخاذ قرار عقلائي مع تقدير كمي لحجم المخاطرة ، و بذلك فإن الإحصاء هو الفن في اتخاذ القرارات الحاسمة في المواقف الصعبة ، و تحتل نظرية التقدير و نظرية اختبار الفرضيات مكانة الصدارة، و رأينا في الفقرات السابقة التقدير النقطي و التقدير المجالي و في هذه الفقرة سندرس اختبار الفرضيات .

تعريف (4-12) : الفرضية الإحصائية : هي أيّ مقولة أو إفادة أو تخمين تتعلق بوسطاء المجتمع الإحصائي أو بشكل توزيعه و تحتل الصحة أو الخطأ .

إذ إن صحة الفرضية أو خطأها لا يمكن معرفته بدقة إلا إذا تناولت الدراسة جميع عناصر المجتمع ، و هذا في معظم الحالات غير عملي ، لذا نختار عينة عشوائية من هذا المجتمع ، و اعتماداً على المعلومات التي تحويها العينة يتم القرار إذا كانت الفرضية الإحصائية صحيحة أم خاطئة .

و من الواضح أن العينة التي تتناقض مع الفرضية تقودنا إلى رفض الفرضية ، بينما إذا دعمت هذه المعطيات الفرضية قبلناها ، و يجب أن نشير هنا إلى أن قبول الفرضية الإحصائية ليس إلا نتيجة لعدم كفاية رفضها ، و لا يعني أنها بالضرورة صحيحة . ومن ثمّ إن رفض الفرضية معناه أن نقرر بأنها خاطئة ، بينما قبولنا الفرضية يعني أننا لم نجد الأسباب الكافية لرفضها ، و هذا يتطلب من الإحصائي أن يضع الفرضية المضادة لتلك التي يعتقد صحتها على أمل أن تقود طرائق الاختبار الإحصائي لها إلى رفضها .

و الفرضية التي يصوغها الإحصائي بأمل رفضها تدعى الفرضية الابتدائية (الأساسية - العدم) H_0 .

إن رفض H_0 يقود إلى قبول فرضية بديلة يرمز لها بـ H_1 .

فمثلاً إذا رغبتنا أن نقرر أن معدل طلاب مدرسة معينة μ_1 أعلى من معدل طلاب مدرسة مجاورة μ_2 ، فيمكن أن نصوغ الفرضية H_0 الآتية :

$\mu_1 - \mu_2 = 0$ أي أن H_0 هي فرضية عدم وجود فرق بين المعدلين، وبشكل عام فإن بدائل الفرضية $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ هي:

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 , H_1 : \mu_1 > \mu_2 , H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 .$$

كذلك الأمر إذا أردنا أن نظهر بأن نسبة الإصابة بمرض السكري في مدينة معينة مختلفة عن P_0 ، فيمكن أن نصوغ الفرضية الأساسية $H_0 : P = P_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_0 : P \neq P_0$.

2.6.4 : اختبار الفرضيات الإحصائية :

من الفقرة السابقة يُلاحظ بأنه لاختبار صحة الفرضية H_0 مقابل الفرضية البديلة H_1 تخص كل منها متغيراً عشوائياً X ، لذلك علينا أن نختار دالة سندعوها دالة الاختبار ، و هي إحصاء للعينة السابقة تساعدنا على اتخاذ القرار، و بما أن دالة الاختبار إحصاء فهي متغير عشوائي تتغير قيمتها من عينة لأخرى ، لهذا يجب علينا معرفة دالة توزيعها الاحتمالي ، و ذلك لكي نتمكن من اتخاذ قرار بشأن الفرضية الإحصائية ، و هنا سنستخدم توزيعات الإحصاءات التي تعرفنا عليها في بداية هذا الفصل أو الفصل السابق ، ثم نقوم بتجزئة مجال تحويلات دالة الاختبار إلى منطقتين ، تسمى إحداهما منطقة الرفض للفرضية H_0 أو تدعى المنطقة الحرجة ، و تسمى المنطقة الأخرى منطقة القبول ، و عادة تحدد منطقة الرفض بتلك المنطقة التي تتألف من قيم دالة الاختبار قليلة الاحتمال عندما تكون H_0 صحيحة ، و تحدد منطقة القبول بالمنطقة التي تتألف من قيم دالة الاختبار

كثيرة الحدوث إذا كانت H_0 صحيحة . و يكون القرار رفض الفرضية H_0 و قبول H_1 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة الرفض ، و يكون القرار بعدم رفض الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار في منطقة القبول ، و بذلك عند اتخاذ القرار برفض أو قبول H_0 يمكن أن يرتكب خطأ ، و هذا الخطأ على نوعين :

a. **الخطأ من النوع الأول :** و هو الخطأ الناجم عن رفض الفرضية H_0 فيما هي صحيحة و نرمز لاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول بـ α ، و يدعى α عندئذ بالخطأ من النوع الأول أو حجم منطقة الرفض أو مستوى أهمية الاختبار أو مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة الإحصائية .

b. **الخطأ من النوع الثاني :** و هو الخطأ الناجم عن قبول H_0 و هي خاطئة و يرمز عادة لاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني بـ β ، و يدعى β هذا بالخطأ من النوع الثاني ، و يدعى $\rho = 1 - \beta$ بقوة اختبار الفرضية H_0 مقابل H_1 الموافق لمنطقة الرفض المحددة بالحجم α .

ملاحظة : نرمز لمنطقة الرفض بـ C و لمنطقة القبول بـ $\bar{C}$ و نحاول أن نجد أفضل اختبار ، و هو الذي تكون فيه α ، β أصغر ما يمكن ، و لكن وجد أنه لا يمكن تصغير الخطأين α ، β في آن واحد إلا إذا كبرنا حجم العينة ، و هذا غير ممكن دوماً . لذلك اعتمد الإحصائيون إستراتيجية تحديد الخطأ من النوع الأول α ، ثم البحث عن منطقة الرفض التي تجعل من الخطأ من النوع الثاني أصغر ما يمكن .

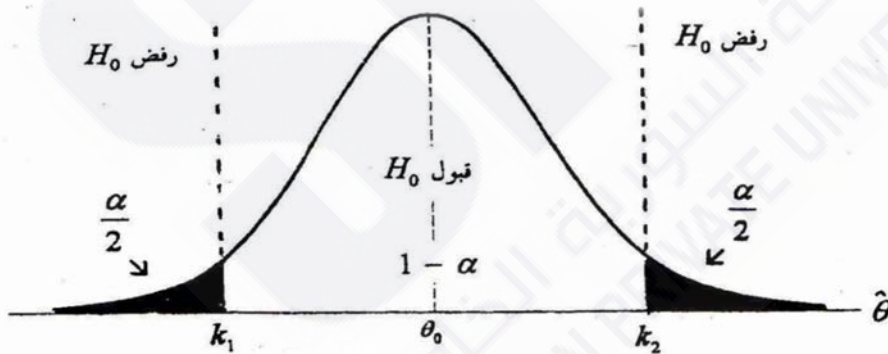
3.6.4 : الاختبارات الوسيطة :

هنا سيتم اختبار الفرضيات الإحصائية المتعلقة بوسطاء المجتمعات الإحصائية علماً أن طبيعة توزيعات تلك المجتمعات معروفه ، فإذا كان θ وسيطاً لمجتمع إحصائي ، و كانت لدينا الفرضية موضع الاختبار : $H_0 : \theta = \theta_0$ فإن الفرضية البديلة H_1 تكون على ثلاثة أنواع :

a. الفرضية البديلة ذات الطرفين (من جانبيين) : أي $H_1 : \theta \neq \theta_0$ و هنا من أجل α مستوى المعنوية و كانت دالة الاختبار ، فإننا نضع نصف α في كل طرف من طرفي توزيع دالة الاختبار .

فمثلاً إذا كان الشكل (3-4) يمثل منحنى الكثافة لدالة الاختبار حول θ_0 فإننا نحدد K_1 ، K_2 بحيث يكون

$$P [\theta_0 < K_1] = P [\theta_0 > K_2] = \alpha/2$$

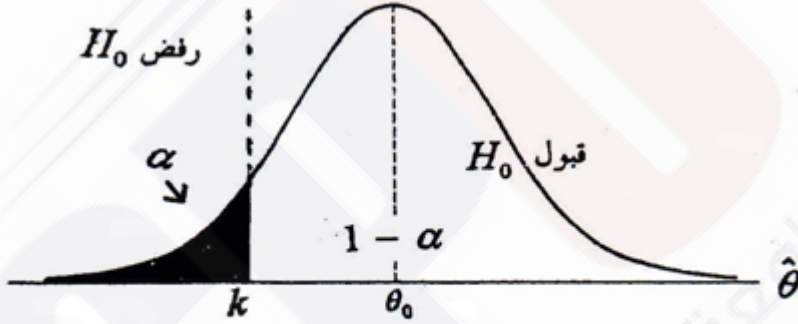


الشكل (3.4)

المنطقة المخرجة لـ $H_1 : \theta \neq \theta_0$

ونقبل الفرضية H_0 إذا وقعت قيمة دالة الاختبار θ_0 المحسوبة من العينة بين K_1 ، K_2 و نرفض H_0 إذا وقعت قيمة θ_0 في المنطقة المظللة التي تمثل منطقة الرفض.

b. الفرضية البديلة من الطرف الأيسر الأدنى : أي $H_1 : \theta < \theta_0$
و هنا نضع α في الطرف الأيسر من توزيع دالة الاختبار θ_0 كما في الشكل (4-4)



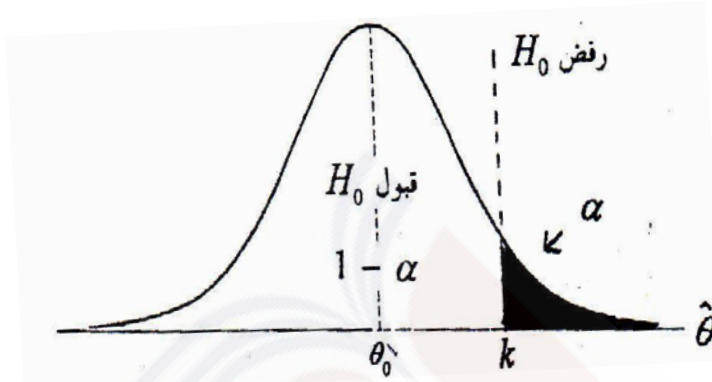
4.4

الشكل

المنطقة المظللة لـ $H_1 : \theta < \theta_0$

حيث تحدد K بحيث يكون $P[\theta_0 < K] = \alpha$ و نقبل H_0 إذا كانت قيمة إحصاء الاختبار θ_0 أكبر من K ، و نرفض H_0 إذا كانت القيمة أصغر من K .

c. الفرضية البديلة ذات الطرف الأيمن (الذيل الأيمن) الأعلى أي:
 $H_1 : \theta > \theta_0$ و هنا نضع α في الطرف الأيمن من توزيع دالة الاختبار θ_0 كما في الشكل (5-4) الذي يمثل مثلاً منحنى دالة الكثافة لإحصاء الاختبار θ_0



الشكل 5.4
المنطقة المرفوضة لـ $H_0 : \theta > \theta_0$

حيث تحدد K بحيث يكون $P[\theta > K] = \alpha$ و نقبل H_0 إذا كانت قيمة إحصاء الاختبار θ_0 أصغر من K و نرفض H_0 إذا كانت القيمة دالة الاختبار أكبر من K .

(4.6.4) : اختبارات حول المتوسط :

(1.4.6.4) : اختبارات حول متوسط مجتمع طبيعي تباينه σ^2 معلوم:

ليكن $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ و σ^2 معلوم و لنكن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية

لمتغير عشوائي X متوسطها $\bar{X}$ و يكون $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

حيث $\bar{X}$ يصلح أن يكون إحصاء الاختبار لفرضيات تتعلق بالمتوسط μ :

وسوف نميّز ثلاث حالات :

1- من أجل اختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta \neq \theta_0$ و عند مستوى المعنوية α و الاختبار من الطرفين ستكون قيمة إحصائية الاختبار

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{تحت صحة } H_0 :$$

و من أجل α مستوى المعنوية و الاختبار من الطرفين و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار ، ستكون منطقة القبول لـ H_0 هي :

$$[Z_{\alpha/2}, Z_{1-\alpha/2}]$$

و منطقة الرفض لـ H_0 : $[-\infty, Z_{\alpha/2}] \cup [Z_{1-\alpha/2}, +\infty]$

(حيث V تعني أو).

مثال (10-4): إذا علمنا أن وزن قطعة غذاء من نوع معين لها التوزيع الطبيعي بانحراف معياري $G = 5$ ، و لدى معاينة عينة تحوي 16 قطعة غذاء من هذا النوع ، تبين أن متوسط وزنها هو $G = 244$ و المطلوب: عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ اختبر صحة الفرضية $H_0 : \mu = 250$ ضد الفرضية $H_1 : \mu \neq 250$

الحل : هنا الاختبار من الطرفين و يكون من أجل

$$\alpha = 0.05 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow Z_{0.975} = 1.96$$

و قيمة إحصائية الاختبار هنا تحت صحة H_0

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{244 - 250}{5/\sqrt{16}} = -4.8$$

ومن أجل $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرفين و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار ، ستكون منطقة القبول للفرضية H_0 :

$$[Z_{\alpha/2}, Z_{1-\alpha/2}] = [-1.96, 1.96]$$

و منطقة الرفض : $[-\infty, -1.96] \cup [1.96, +\infty]$

و بمقارنة $Z_0 = -4.8$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أن Z_0 تنتمي لمنطقة الرفض من جهة اليسار و منه نرفض H_0 و نقبل H_1 أي $\mu \neq 250$ و كون الرفض من جهة اليسار فإن $\mu < 250$.

2- لاختبار $H_0 : \mu = \mu_0$ ضد الفرضية $H_1 : \mu < \mu_0$ عند مستوى المعنوية α ، فإننا نرفض H_0 عندما تكون قيمة إحصائية الاختبار Z_0 تنتمي للمنطقة $[-\infty, Z_{\alpha}]$ و نقبل H_0 إذا كانت Z_0 تنتمي للمنطقة $[Z_{\alpha}, +\infty]$

3- لاختبار $H_0 : \mu = \mu_0$ ضد الفرضية $H_1 : \mu > \mu_0$ عند مستوى المعنوية α ، فإننا نرفض H_0 عندما تكون إحصائية الاختبار Z_0 تنتمي للمنطقة $[Z_{1-\alpha}, +\infty]$ و نقبل H_0 إذا كانت Z_0 تنتمي للمنطقة $[-\infty, Z_{1-\alpha}]$.

مثال (11-4): تدل الدراسات أن وزن الطفل عند الولادة يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 3.2 K.G و انحراف معياري 0.6 K.G و عند معاينة 16 طفلاً أمهاتهم خضعن لنظام غذائي جديد تبين أن متوسط الوزن بهذه العينة 3.5 K.G هل يمكننا القول : إنَّ النظام الغذائي الجديد قد أسهم بتحسين متوسط وزن الطفل عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.025$.

الحل : هنا نختبر $H_0 : \mu = 3.2$ مقابل الفرضية $H_1 : \mu > 3.2$

و عند $\alpha = 0.025$ و الاختبار من اليمين

إن إحصائية الاختبار هنا $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$

و قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 ستكون :

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{3.5 - 3.2}{0.6 / \sqrt{16}} = 2$$

و عند مستوى معنوية $\alpha = 0.025$ و الاختبار من الطرف الأيمن و التوزيع

طبيعي معياري لإحصائية الاختبار ، ستكون منطقة القبول H_0 من الشكل :

$$[-\infty, Z_{1-\alpha}] = [-\infty, Z_{0.975}] = [-\infty, 1.96]$$

$$H_1 \text{ من الشكل } [1.96, +\infty]$$

و بمقارنة $Z_0 = 2$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أن Z_0 تنتمي لمنطقة

رفض H_0 أي إننا نقبل H_1 أي $\mu > 3.2$ ، و هذا يعني أن النظام الغذائي

الجديد قد أسهم في تحسين وزن الطفل عند ولادته .

ملاحظات:

1. إذا كان المجتمع غير طبيعي و $n \geq 30$ نطبق مبرهنة النهاية المركزية

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \approx N(0, 1) \text{ : ليكون الإحصاء}$$

2. في الحالة التي يكون فيها تباين المجتمع σ^2 مجهولاً (سواء كان المجتمع

طبيعياً أم غير طبيعي) ، و من أجل ($n \geq 30$) فإن تباين العينة S^2 هو

تقدير جيد لـ σ^2 ، و لذلك يمكن الاستعاضة عن σ^2 بقيمة S^2 من العينة و
يجرى اختبار الفرضية حول المتوسط تماماً كما سبق .

مثال (12-4) : إذا كان متوسط المدة اللازمة لاستجابة المريض لدواء مهدئ هو 5 دقائق ، اقترح دواءً جديداً ، و جُرِّبَ على 64 مريضاً ، فكان متوسط المدة اللازمة لاستجابة المريض هو 4.7 دقيقة و بانحراف معياري قدره 1.2 دقيقة. فهل الدواء الجديد المقترح أفضل من القديم عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.01$ ؟

الحل:

هنا نختبر صحة الفرضية $\mu = 5$ مقابل الفرضية البديلة

$H_1 : \mu < 5$ و من أجل $\alpha = 0.01$ يكون $1 - \alpha = 0.99$

حيث $Z_{0.99} = 2.33$ و إحصائية الاختبار : $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

و قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 : $Z_0 = \frac{4.7 - 5}{1.2/8} = -2$

و منطقة قبول H_0 : $[-2.33, +\infty[$ و $Z_{\alpha}, +\infty[$

وبملاحظة أن $Z_0 \in [-2.33, +\infty[$ فإننا نقبل H_0 ، ومن ثم فالنظام الجديد ليس أفضل من النظام القديم للتهدئة .

مثال (13-4) :

تبين من عينة عشوائية من الحجم 100 متوفى أن متوسط العمر لهؤلاء كان 71.8 سنة بانحراف معياري 8.9 سنة . فهل يشير هذا إلى أن متوسط العمر الآن أكبر من 70 سنة بمستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ ؟

الحل : لدينا الفرضية الابتدائية (الأساسية أو فرضية العدم) $H_0 : \mu = 70$ و الفرضية البديلة $H_1 : \mu > 70$ و مستوى الأهمية (الدلالة الإحصائية أو مستوى المعنوية) : $\alpha = 0.05$

إن إحصائية الاختبار هنا $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ و قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 : $Z_0 = \frac{71.8 - 70}{8.9/\sqrt{100}} = 2.02$

و عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ و الاختبار من جهة اليمين و التوزيع طبيعي معياري لإحصائية الاختبار ستكون منطقة قبول H_0 هي :

$$] - \infty , 1.65] =] - \infty , Z_{0.95}] =] - \infty , Z_{1-\alpha/2} [$$

و بمقارنة $Z_0 = 2.02$ مع منطقة قبول H_0 نجد أن Z_0 خارج هذه المنطقة .

أي تقع في منطقة الرفض ، و منه نرفض H_0 و نقبل H_1 ، أي إن متوسط العمر الآن أكبر فعلاً من 70 سنة و بثقة 95% .

2.4.6.4 : اختبارات حول متوسط مجتمع طبيعي تباينه σ^2 مجهول:

رأينا سابقاً أنه إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من X حيث $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ متوسطها $\bar{x}$ و تباينها S^2 ، σ^2 مجهول أن الإحصاء

$$T = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim T_{(n-1)} \quad ; (n < 30) \quad \text{ستيوذنت}$$

و هذا الإحصاء يستخدم لاختبار فرضيات حول μ متوسط مجتمع طبيعي تباينه σ^2 مجهولاً ، و يعتمد كإحصاء للاختبار وفق :

1- إذا كانت $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu \neq \mu_0$ عند مستوى المعنوية α

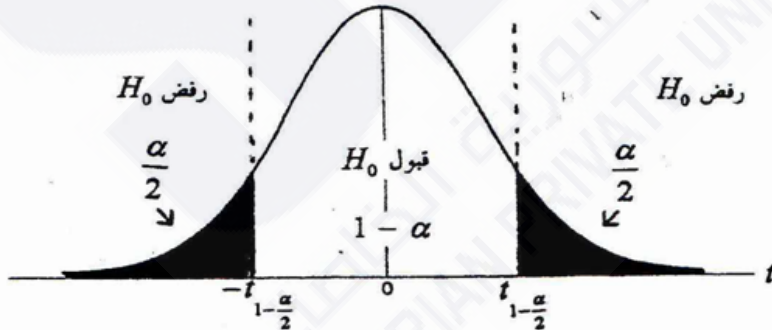
إن قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 تكون $T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$.

و من أجل مستوى المعنوية α و الاختبار من الطرفين و التوزيع لإحصائية الاختبار لستيوذنت بـ $\gamma = n - 1$ درجة من الحرية

تكون منطقة قبول H_0 : $[t_{\alpha/2}(\gamma), t_{1-\alpha/2}(\gamma)]$

و تكون منطقة رفض H_0 : $[-\infty, t_{\alpha/2}(\gamma)] \cup [t_{1-\alpha/2}(\gamma), +\infty]$

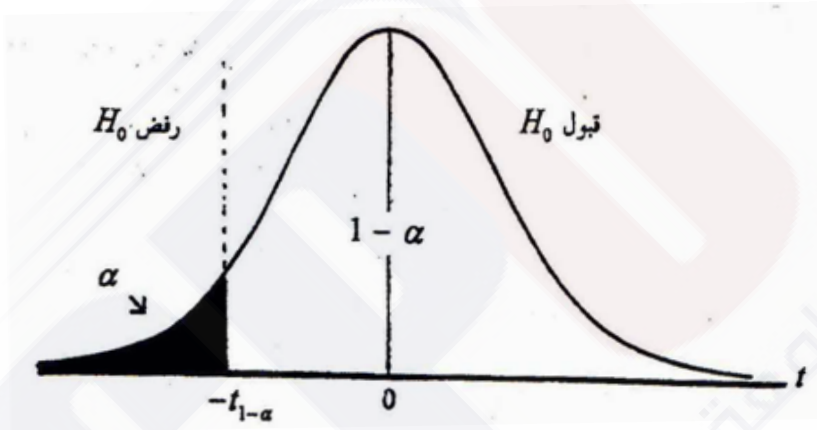
ثم نقارن T_0 مع مناطق الرفض و القبول لاتخاذ القرار المناسب كما رأينا في الفقرة السابقة و كما في الشكل (6-4)



الشكل (6.4)

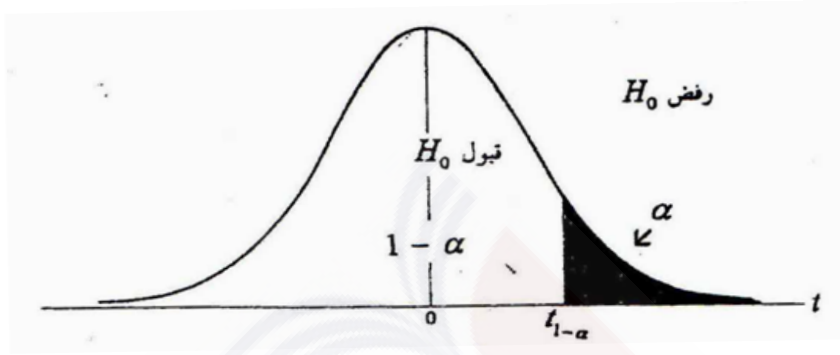
2- إذا كانت $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu < \mu_0$ عند مستوى المعنوية α والاختبار من الطرف الأيسر إن منطقة الرفض H_0 هي $[-\infty, t_\alpha(\gamma)]$ و منطقة القبول $[t_{1-\alpha}(\gamma), +\infty]$ كما في الشكل (7-4) حيث:

$$t_\alpha(\gamma) = -t_{1-\alpha}(\gamma)$$



الشكل (7.4)

3- إذا كانت $H_0 : \mu = \mu_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu > \mu_0$ عند مستوى المعنوية α و الاختبار من الطرف الأيمن إن منطقة الرفض H_0 هي $[t_{1-\alpha}(\gamma), +\infty]$ ومنطقة القبول $[-\infty, t_{1-\alpha}(\gamma)]$ كما في الشكل (8-4)



الشكل (8.4)

مثال (4-14): تدعي شركة لإنتاج البطاريات التي تستخدم في الأجهزة الطبية بأن عمر البطارية من إنتاجها له التوزيع الطبيعي بمتوسط 3 سنوات أخذت عينة عشوائية من إنتاج هذه الشركة تحوي 6 بطاريات ، فكانت أعمارها بالسنوات كما يأتي :

3.8 1.9 2.9 0.9 4.0 3.5

هل نستنتج بأن الشركة تبالغ في ادعائها بالنسبة لمتوسط عمر البطاريات التي تنتجها عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ ؟.

الحل: هنا سنختبر $H_0 : \mu = 3$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu < 3$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ و الاختبار من الطرف الأيسر

$\gamma = n - 1 = 6 - 1 = 5$, $1 - \alpha = 0.99$, $\alpha = 0.01$ (من جدول ستودنت)

$$t_{0.01}(5) = -t_{0.99}(5) = -3.365$$

و بحساب $\bar{x}$ ، S^2 من العينة المعطاة نجد أن

$$\bar{x} = 2.833 \quad , \quad S = 1.213$$

و إحصائية الاختبار هنا ستبندت $T_{(\gamma=n-1)}$ $T = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} \sim$

و تحت صحة H_0 تكون قيمة إحصائية الاختبار

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.833 - 3}{1.213/\sqrt{6}} = -0.337$$

و من أجل مستوى المعنوية $\alpha = 0.01$ و الاختبار من الطرف الأيسر و التوزيع لإحصائية الاختبار هو ستبندت ب $\gamma = 5$ درجة من الحرية تكون

$$[t_{\alpha}(\gamma), +\infty[= [-3.365, +\infty[: H_0$$

$$] - \infty, t_{\alpha}(\gamma)[=] - \infty, -3.365[: H_0$$

وبمقارنة $T_0 = -0.337$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أن T_0 تقع في منطقة القبول ، ومن ثم نقبل H_0 ، و هذا يعني أن الشركة لم تتألف في ادعائها.

مثال (4-15) : يمثل البيان الآتي إنتاج عشر شجيرات لصنف جديد من الخضار مقيساً بالكيلوغرام :

2.2 2.1 3.0 4.1 3.9 2.7 3.1 2.3 4.2 1.9

فإذا علمنا أن قياسات الإنتاج في مجتمع شجيرات هذا الصنف من الخضار له توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 3K.G$ فهل نستنتج بأن إنتاج الصنف الجديد أفضل من القديم بمستوى أهمية $\alpha = 0.05$.

الحل: هنا سنختبر $H_0 : \mu = 3$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \mu > 3$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ فإن $1 - \alpha = 0.995$ و الاختبار من الطرف الأيمن $\gamma = n - 1 = 10 - 1 = 9$ من جدول ستيودنت

$$t_{1-\alpha}(\gamma) = t_{0.995}(9) = 3.250$$

و بحساب $\bar{x}$ ، S^2 من البيان المفروض نجد أن $S = 0.862$ ، $\bar{x} = 2.95$ ،

و قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 تكون:

$$T_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{2.95 - 3}{0.862/\sqrt{10}} = -0.183$$

و من أجل مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرف الأيمن و التوزيع لإحصائية الاختبار هو ستيودنت ب $\gamma = 9$ درجة من الحرية تكون منطقة رفض H_0 من الشكل:

$$[t_{1-\alpha}(\gamma) , +\infty[=]t_{0.995}(9) , +\infty[=]3.250 , +\infty[$$

و منطقة قبول H_0 : $] -\infty , 3.250 [$ و $] -\infty , t_{0.995}(9) [$

وبمقارنة $T_0 = -0.183$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أنها تنتمي لمنطقة القبول H_0 أي $\mu = 3$ ، و هذا يعني أن الصنف الجديد ليس أفضل من الصنف القديم في الإنتاج .

5.6.4 اختبارات حول النسبة في المجتمع (وسيط متغير برنولي (P)):

إن مثل هذه الاختبارات مرغوبة في العديد من المجالات ، فمثلاً رجال السياسة يهتمون بمعرفة نسبة المقترعين لصالح مرشح معين ، و الطبيب يهتم بمعرفة نسبة

نجاح حملة تلقيح معينة أو طريقة علاج مرض معين ... إلخ . ولقد رأينا مسبقاً أن $\hat{p} = \bar{x} = \frac{y}{n}$ مقدار منصف لـ p . حيث y عدد النجاحات و $\bar{x}$ متوسط العينة المسحوبة من مجتمع برنولي و من أجل $n \geq 30$ يكون للمتغير العشوائي

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} = \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0, 1)$$

و هو إحصاء الاختبار ، لاختبار فرضيات حول p أي $H_0 : p = p_0$

و تكون قيمة إحصاء الاختبار تحت صحة H_0 :

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{y - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

و يمكن أن نميز ثلاث حالات (حسب نوعيه الاختبار البديل) :

1. من أجل $H_0 : p = p_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : p \neq p_0$ عند مستوى المعنوية α ، هنا الاختبار من الطرفين ستكون منطقة قبول H_0 من الشكل : $\left[Z_{\alpha/2}, Z_{1-\alpha/2} \right]$ ومنطقة الرفض لـ H_0 من الشكل :

$$] -\infty, Z_{\alpha/2} [\cup] Z_{1-\alpha/2}, +\infty [$$

و نقارن Z_0 مع مناطق الرفض و القبول لاتخاذ القرار المناسب كما رأينا مسبقاً.

2. من أجل $H_0 : p = p_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : p < p_0$ عند مستوى المعنوية α ، هنا الاختبار من الطرف الأيسر ستكون منطقة قبول لـ H_0 من الشكل : $[Z_{\alpha}, +\infty [$ ومنطقة الرفض لـ H_0 من الشكل :

$$] - \infty , Z_{\alpha} [$$

و نقارن Z_0 مع مناطق الرفض و القبول لاتخاذ القرار المناسب .

3. من أجل $H_0 : p = p_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : p > p_0$ عند مستوى المعنوية α ، هنا الاختبار من الطرف الأيمن ستكون منطقة قبول H_0 من الشكل : $] - \infty , Z_{1-\alpha} [$ و منطقة الرفض H_0 من الشكل : $] Z_{1-\alpha} , + \infty [$

و نقارن Z_0 مع مناطق الرفض و القبول لاتخاذ القرار المناسب .

مثال (4-16): تدعي شركة لصناعة الأدوية ، بأن أحد أدويتها الخاصة بمعالجة أحد الأمراض، تحدث استجابة خلال فترة قصيرة لـ 0.80 من الأشخاص المصابين بالمرض المدروس، و لاختبار صحة هذا الادعاء أخذت عينة عشوائية من 150 مريضاً بهذا المرض و جرب عليهم هذا الدواء ، فوجد أن 110 من المرضى استجابوا للمعالجة خلال الفترة المفروضة ، فهل هذه النتائج تدعم صحة ادعاء الشركة بمستوى $\alpha = 0.01$ من الأهمية ؟

الحل: هنا نختبر الفرضية $H_0 : p = 0.80$ مقابل $H_0 : p \neq 0.80$ و عند مستوى المعنوية

$$\alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \Rightarrow$$

$$Z_{0.995} = 2.58 , Z_{0.005} = -2.58$$

$$Z = \frac{y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0, 1) \quad \text{و إحصائية الاختبار :}$$

و تحت صحة H_0 تكون قيمة إحصائية الاختبار

$$Z_0 = \frac{110 - (150) \cdot (0.80)}{\sqrt{(150) \cdot (0.80) \cdot (0.20)}} = -2.04$$

و من أجل $\alpha = 0.01$ و الاختبار من الطرفين و التوزيع لإحصائية الاختبار هو طبيعي معياري :

ستكون منطقة رفض H_0 : $[-\infty, -2.58] \cup [2.58, +\infty]$

و تكون منطقة قبول H_0 : $[-2.58, 2.58]$

و بمقارنة $Z_0 = -2.04$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أن Z_0 تنتمي لمنطقة القبول ، و منه نقبل H_0 و نرفض H_1 ، و هذا يعني أن ادعاء الشركة صحيح.

مثال (4-17) : إذا كان 54 % من إجمالي السكان يفضلون السكن داخل المدينة ، و نظراً للظروف البيئية من تلوث و ضجيج، يعتقد أن تغيراً قد طرأ على هذه النسبة ، و لاختبار هذا التغير ، تم سؤال عينة عشوائية من 1000 شخص من سكان هذه المدينة فكان منهم 480 ممن يفضلون السكن في المدينة و 520 يفضلون السكن في ريف المدينة ، و المطلوب عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ، هل نسبة من يفضلون السكن في المدينة أصبحت أقل مما كانت عليه في البداية ؟

الحل : هنا ستختبر $H_0 : p = 0.54$ مقابل $H_1 : p < 0.54$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرف الأيسر حيث $1 - \alpha = 0.95$ و إحصائية الاختبار

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \sim N(0, 1) \quad , \quad (q = 1 - p) \quad \text{حيث}$$

و قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 :

$$Z_0 = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0.48 - 0.54}{\sqrt{\frac{(0.54)(0.46)}{1000}}} = -3.82$$

و من أجل مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرف الأيسر و التوزيع لإحصائية الاختبار هو طبيعي معياري، ستكون منطقة رفض H_0 من الشكل : $[-\infty, Z_\alpha[=]-\infty, Z_{0.05}[=]-\infty, -1.65[$

و منطقة قبول H_0 من الشكل : $[Z_\alpha, +\infty[= [-1.65, +\infty[$

و بمقارنة $Z_0 = -3.82$ مع مناطق الرفض و القبول نجد أن Z_0 تنتمي لمنطقة رفض H_0 ، ومن ثم نرفض H_0 أي $p = 0.54$ ونقبل H_1 أي $p < 0.54$ أي هناك تراجع بنسبة من يفضلون السكن في المدينة .

6.6.4 اختبارات حول تباين مجتمع طبيعي وسيطاه مجهولان :

رأينا في بداية هذا الفصل أنه من أجل عينة عشوائية $X_1, X_2, \dots, X_n$ من X حيث $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$ ومتوسط العينة $\bar{X}$ وتباينها S^2 سيكون للإحصاء

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

توزيع كاي-مربع بـ $\gamma = n - 1$ درجة من الحرية ، و لذلك سنستخدم هذا الإحصاء كدالة اختبار لفرضيات تتعلق بـ σ^2 و سنميز الحالات الآتية :

1. من أجل اختبار $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ عند مستوى الأهمية α ، و هنا الاختبار من الطرفين ستكون إحصائية الاختبار

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

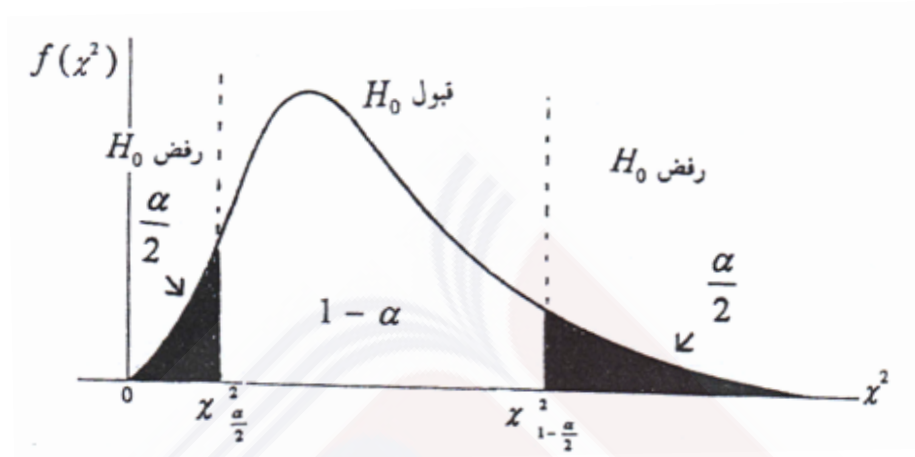
و ستكون قيمة إحصائية الاختبار تحت صحة $H_0 : \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

و من أجل مستوى الأهمية α و الاختبار من الطرفين و التوزيع لإحصائية الاختبار هو كاي-مربع بـ $\gamma = n - 1$ درجة من الحرية ستكون منطقة الرفض لـ H_0 :

$$[0, \chi^2_{\alpha/2}(n-1)] \cup [\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), +\infty]$$

$$\left[\chi^2_{\alpha/2}(n-1), \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) \right] : H_0 \text{ منطقة قبول الفرضية}$$

ثم نقارن قيمة إحصائية الاختبار الناتجة χ^2 مع مناطق الرفض و القبول لـ H_0 لاتخاذ القرار المناسب لقبول أو رفض H_0 كما في الشكل (4-9) .



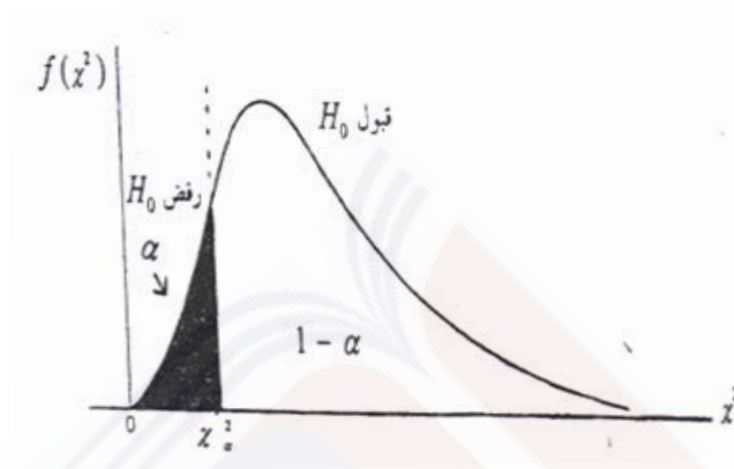
الشكل (9.4)

2. و لاختبار $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ عند مستوى الأهمية α و هنا الاختبار من اليسار

ستكون منطقة الرفض لـ H_0 : $] 0 , x_{\alpha}^2(n-1) [$

و منطقة قبول الفرضية H_0 : $[x_{\alpha}^2(n-1) , + \infty [$

كما في الشكل (4- 10) .



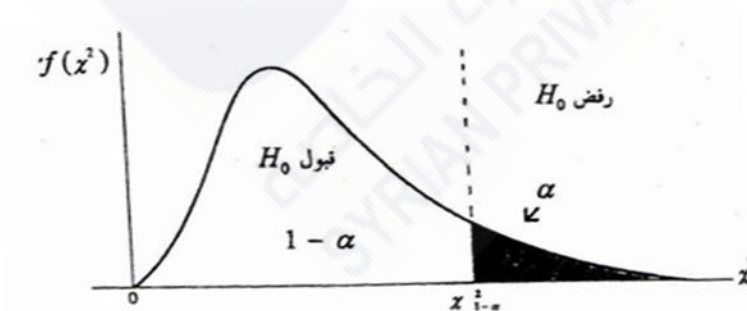
الشكل (10.4)

3. و لاختبار $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ عند مستوى الأهمية α و هنا الاختبار من الطرف الأيمن ستكون منطقة الرفض

$$[\chi^2_{1-\alpha}(n-1) , +\infty [: H_0]$$

و منطقة قبول الفرضية $H_0 : [0 , \chi^2_{1-\alpha}(n-1)]$

كما في الشكل (4 - 11) .



الشكل (11.4)

مثال (18-4) :

ينتج معمل الأدوية نوعاً من العلاج يحتوي على مادة فعالة يجب أن تكون محددة بشكل دقيق . و لدراسة مدى دقة المصنع في إضافة كمية المادة الفعالة إلى كل حبة من حبوب هذا العلاج ، قام المسؤولون في المصنع بتحليل عينة من 30 حبة ، فوجدوا أن الانحراف المعياري لكمية هذه المادة في الحبوب يساوي 1.30M.G ، استخدم هذه المعلومات لاختبار صحة الفرضية $H_0 : \sigma^2 = 1.50$ مقابل الفرضية $H_1 : \sigma^2 < 1.50$ عند مستوى الأهمية (المعنوية) $\alpha = 0.05$ ؟

الحل:

بما أن $\alpha = 0.05$ و $\gamma = n - 1 = 29$ و الاختبار من الطرف الأيسر عندئذ:

$$\chi^2_{\alpha}(n-1) = \chi^2_{0.05}(29) = 17.7$$

(من جدول كاي-مربع عند $\gamma = 29$ درجة من الحرية) .

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(\gamma=n-1)} \quad \text{و إحصائية الاختبار ستكون}$$

وقيمة إحصائية الاختبار تحت صحة H_0 ستكون :

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(29) \cdot (1.3)^2}{1.5} = 32.673$$

و من أجل مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ و الاختبار من الطرف الأيسر و التوزيع لإحصائية الاختبار هو كاي-مربع بـ $\gamma = 29$ درجة من الحرية ستكون منطقة

رفض H_0 من الشكل: $[0, 17.7] = [\chi^2_\alpha(n-1), 0]$ و منطقة قبول H_0 من الشكل: $[17.7, +\infty[= [\chi^2_\alpha(n-1), +\infty[$ و بمقارنة إحصائية الاختبار الناتجة $\chi_0^2 = 32.673$ مع مناطق الرفض و القبول لـ H_0 نجد أن χ_0^2 تقع في منطقة قبول H_0 ، ومن ثمّ نَقبل H_0 و نرفض H_1 أي $\sigma^2 = 1.50$.

7.4) تمارين غير محلولة (للقسم العملي) :

1. يمثل البيان التالي إنتاج 10 شجيرات من نوع معين من الخضار مقيساً بالكيلوغرام:

4.0 , 4.3 , 2.9 , 3.7 , 2.9 , 5.0 , 4.1 , 3.2 , 3.6 , 3.3

إذا علمنا أن قياسات الإنتاج في مجتمع (جمهرة) الشجيرات تتوزع طبيعياً بتباين 0.40 فالمطلوب :

- أ- أوجد % 95 مجال ثقة حول متوسط الإنتاج الحقيقي μ للشجيرة .
- ب- ما حجم العينة المناسب لتقدير متوسط إنتاج الشجيرة μ بحيث لا يتجاوز الخطأ الأعظمي المرتكب لتقدير μ ما مقداره 0.2 K و بثقة % 95 .

2. خضعت عينة من 12 فأراً تجريبياً لنظام غذائي معين خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياتها ، و قيست الزيادة في وزن كل فأر بالغرام و كانت كما يأتي:

61 , 62 , 67 , 59 , 62 , 60 , 64 , 65 , 58 , 54 , 62 , 55

و المطلوب :

- أ- عين % 90 مجال ثقة لمتوسط الزيادة في الوزن خلال الأشهر الثلاثة الأولى من حياة الفئران في مجتمع الدراسة الذي جاءت منه العينة ، علماً بأن الزيادة بالوزن تتبع التوزيع الطبيعي .

- ب- ما حجم العينة المناسب لتقدير المتوسط أعلاه بثقة % 90 و بخطأ لا يتجاوز 2 غرام .

3. من عينة عشوائية مؤلفة من 36 مريضاً مصاباً بمرض الإيدز ، كان متوسط العمر الذي قضوه بعد الإصابة بالمرض هو 2.6 سنة و بانحراف معياري 0.3 سنة و المطلوب :

أ- أوجد % 99 مجال ثقة حول μ متوسط العمر الحقيقي الذي يقضيه مريض الإيدز بعد الإصابة بالمرض .

ب- ما حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة % 99 و بخطأ لا يتجاوز 0.05 ؟

4. في دراسة حول التخلف العقلي لدى حديثي الولادة و الناتج من عدوى وراثية عن طريق الصبغيات الأنثوية وجد أن هناك 4 حالات من عينة مؤلفة من 150 طفل حديثي الولادة يعانون هذا التخلف العقلي . و المطلوب :

أ- أوجد % 95 مجال ثقة للنسبة الحقيقية للمتخلفين عقلياً و الناتج من العدوى الوراثية، و فسر الناتج.

ب- ما حجم العينة الملائم لتقدير هذه النسبة بثقة % 95 و بخطأ لا يتجاوز 0.001 ؟

5. لتقدير تباين كمية النحاس المركز في نوع معين من النباتات الموجودة على ضفاف أحد الأنهار ، اخترنا عشوائياً عينة مؤلفة من 16 نبتة ، و حرقناها، ثم حللنا الرماد الحاصل لكل نبتة ، فوجدنا كمية النحاس المركز كما يأتي (حسب وحدة قياس معينة):

50 , 8 , 14 , 27 , 18 , 34 , 3 , 5
19 , 60 , 25 , 70 , 20 , 35 , 43 , 38

و بفرض أن المجتمع المدروس يتوزع طبيعياً ، فالمطلوب :

أوجد % 90 مجال ثقة حول التباين الحقيقي σ^2 الدال على كمية النحاس المتوجود في هذا النوع من النباتات .

6. شركة لصناعة الأدوية المنظمة للضغط المرتفع ، تدعي بأن خلال فترة قصيرة يمكن أن ينتظم الضغط بنسبة % 95 ، و لاختبار هذا الادعاء تم تجريب الدواء على عينة من 200 مريض يعاني ارتفاع الضغط الشرياني، و لوحظ انتظام الضغط عند 185 منهم ضمن الفترة القصيرة المستخدمة لهذا الادعاء و المطلوب: هل نقبل بصحة ادعاء الشركة عند مستوى الأهمية $\alpha = 0.05$ من الأهمية ؟

7. من عينة عشوائية مؤلفة من 500 مدخن ، تم إيجاد 160 منهم مصابين باختلاطات رئوية سببها التدخين ، و المطلوب : أوجد % 99 مجال ثقة حول النسبة الحقيقية للمصابين باختلاطات رئوية في مجتمع المدخنين ، و فسر الناتج .

8. يخصص لدواء معين % 30 من الأسبرين لكل حبة ، أخذت عينة عشوائية من 16 حبة ، و جرى تحليلها ، فتبين أن متوسط كمية الأسبرين فيها 0.304 بانحراف معياري 0.008 و المطلوب: هل يتفق هذا الدواء مع المواصفات المطلوبة بمستوى 0.01 من الأهمية .

9. قام باحث طبي باختبار عقار جديد مضاد لأحد الجراثيم، فأعطى هذا الدواء لـ 10 أشخاص مصابين بنفس الجرثومة المدروسة، وقد اختبروا عشوائياً من مجتمع المصابين بهذا الجرثومة . و الهدف من ذلك معرفة متوسط عدد الأيام اللازمة للشفاء و تباينها . و فيما يأتي الجدول الذي يبين عدد الأيام

اللازمة للشفاء للأشخاص الذين جرب عليهم هذا الدواء :

5 , 7 , 10 , 10 , 8 , 6 , 6 , 5 , 7 , 9

و بفرض أن المجتمع المدروس يتوزع طبيعياً و المطلوب :

- أ- أوجد 95 % مجال ثقة حول متوسط عدد الأيام اللازمة للشفاء لمجتمع مستخدمي هذا العقار ، و فسر الناتج .
- ب- أوجد 95 % مجال ثقة حول تباين عدد الأيام اللازمة للشفاء لمجتمع مستخدمي هذا العقار ، و فسر الناتج .

10. ادعى باحث أن نصف الأشخاص الكبار في السن الذين يتم تخديرهم استعداداً للعمليات الجراحية ، يعانون مضاعفات . و لاختبار هذا الادعاء، أخذت عينة من 100 شخص خضعوا للتخدير من أجل العمل الجراحي ، فوجد أن 36 منهم حصلت لهم مضاعفات . و المطلوب : هل يمكننا قبول هذا الادعاء بمستوى 95 % من الأهمية.

11. تبين من عينة عشوائية من الحجم $n = 100$ متوفى كانوا مريضين بسرطان الرئة أن متوسط العمر لهؤلاء هو 52.8 سنة بانحراف معياري قدره 6.2 سنة، فهل يشير ذلك إلى أن متوسط عمر المصابين بسرطان الرئة هو أكبر من 50 سنة ، و ذلك عند مستوى المعنوية (الأهمية) $\alpha = 0.05$ ؟

12. تدعي شركة لصناعة الأدوية أن أحد أدويتها الخاصة بمعالجة التشنجات العضلية تحدث استجابة خلال فترة قصيرة لـ 80 % من المرضى ؛ و لاختبار هذا الادعاء ، أخذت عينة عشوائية من 160 مريضاً ، فوجد أن 100

منهم قد حدثت لهم استجابة فعلاً خلال الفترة الزمنية المفروضة لدى استعمالهم الدواء ، و المطلوب عند مستوى الدلالة الإحصائية (المعنوية) $\alpha = 0.01$ اختبار الفرضية الآتية : قبول صحة ادعاء الشركة .

13. بهدف تقدير متوسط كمية الخضاب في دم الأطفال في بلد معين ، تم أخذ عينة عشوائية من 100 طفل من هذا البلد ، فوجد أن متوسط كمية خضاب الدم هو 12.5G وبانحراف معياري قدره 1.5 G و المطلوب: أوجد 95 % مجال ثقة حول متوسط μ الحقيقي لكمية خضاب الدم عند أطفال البلد المدروس ، و فسر الناتج ؟

14. أجري اختبار في دار التوليد بدمشق ، لمعايرة التروكسين لدى 49 مولوداً ذكراً ، فكان المتوسط الحسابي لهذه العينة $\bar{x} = 9.8$ بانحراف معياري 3.10 و المطلوب: أوجد 99 % مجال ثقة حول المتوسط الحقيقي μ لكمية التروكسين في مجتمع المواليد ، و فسر الناتج .

15. في تجربة نفسية ممكن أن يكون رد فعل مريض جراء تناوله أحد أنواع المنشطات، أحد الشكلين A أو B ، و رغب الباحث في تقدير النسبة P التي تدل على رد الفعل A ، حيث جرب على 100 مريض و كان 60 منهم قد أبدوا رد فعل A ، و المطلوب :

أ- أوجد 90 % مجال ثقة حول P ، و فسر الناتج .

ب- ما حجم العينة الملائم لتقدير P بثقة 90 % ويخطأ لا يتجاوز 0.04؟

16. ادعى باحث اجتماعي أن 60 % من سكان المدينة يفضلون السكن في الريف ، ولاختبار هذا الادعاء أخذت عينة من 200 شخص ، فوجد

110 منهم يفضلون السكن في الريف . فهل يمكننا قبول ادعاء الباحث بثقة 99 % .

17. عند القيام بمهمة اختبار انعدام الوزن عند رواد الفضاء ، لوحظ أن معدل خفقان القلب ل 12 رائد فضاء يزداد بمعدل 27.33 ضربة بالدقيقة بانحراف معياري 4.28 ضربة بالدقيقة ، و المطلوب : أوجد 99 % مجال ثقة حول المتوسط الحقيقي لازدياد معدل خفقان القلب ، و ماذا نستنتج ؟ علماً بأن المجتمع المدروس طبيعي .

18. لدى مصنع لأدوية المضاد الحيوي رغبة كبيرة في معرفة فعالية الدواء و جودة إنتاجه . و من أجل ذلك تم تجريب الدواء على 12 مريضاً و كانت مدة الفعالية لكل مريض كالتالي :
8.9, 9.0, 9.1, 8.9, 9.1, 9.0, 9.0, 9.0, 8.9, 8.8, 9.1, 9.2
أوجد 90 % مجال ثقة حول الانحراف المعياري الحقيقي لقياس مدة الفعالية، و فسر الناتج .

19. آلة لتعبئة زجاجات الحليب المعقم ، أخذت عينة عشوائية تتضمن 36 زجاجة من إنتاج هذه الآلة ، فكان متوسط وزن الحليب في الزجاجات 495G بانحراف معياري 4G و المطلوب :
أ- أوجد 95 % مجال ثقة حول المتوسط الحقيقي μ لوزن الحليب الذي تفرغه الآلة في الزجاجاة الواحدة، و فسر الناتج .

ب- ما حجم العينة المناسب لتقدير μ بثقة 99 % و بخطأ لا يتجاوز 2G ؟

20. يرغب مشفى بتقدير عدد الأيام التي يحتاج إليها علاج مريض من مرض معين ، و من أجل ذلك تم دراسة عينة عشوائية من 300 شخص مصابين

بالمرض المدروس ، و وجد أن متوسط عدد الأيام اللازمة للعلاج يساوي 5.8 يوماً ، و بانحراف معياري 1.5 يوماً، و المطلوب أوجد % 99 مجال ثقة حول المتوسط الحقيقي μ لعدد أيام العلاج ، و فسر الناتج.

21. تبين عينة عشوائية من الحجم $n = 100$ متوفى أن متوسط العمر لهم عند الوفاة كان 72 عاماً بانحراف معياري قدره 9 أعوام ، فهل هذا يشير إلى أن متوسط العمر في المجتمع أكبر من 71 عاماً ،و ذلك عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

